

Chapitre 1**Description Mathématique des Phénomènes
des Ecoulements des Fluides****1 - Introduction:**

Dans le présent chapitre nous allons développer une représentation mathématique des mouvements des particules fluides. Le fluide est supposé comme un milieu continu. Ce concept est une idéalisation du phénomène d'écoulement qui fait abstraction de la structure moléculaire de la matière. On peut ainsi envisager des portions de fluide de dimensions infiniment petites, appelées 'particules fluides élémentaires' qui restent constituées de matière continue, même à la limite lorsqu'elles se réduisent à un point M . Ceci nous permet de donner un sens à la notion de *densité de masse* ou masse volumique $\rho(M)$.

On peut définir le mouvement d'un fluide ou l'écoulement par le mouvement de chacun de ces points $M(t)$. C'est la description *Lagrangienne* de l'écoulement.

La connaissance du champ des vecteurs vitesse $V(x,t)$ permet de définir l'état cinématique du fluide en tout point M . C'est la description *Eulerienne* de l'écoulement. C'est cette dernière description qui est la plus utilisée en dynamique des fluides.

Dans ce chapitre, nous allons dériver les équations de base régissant les écoulements sous une forme intégrale puis nous les développerons sous leur forme différentielle locale.

2 - Equations Intégrales :

Quatre lois de base décrivent le mouvement des fluides :

- a - Loi de conservation de la masse ;
- b - Deuxième loi de Newton du mouvement;
- c - Loi de conservation de l'énergie (1ère loi de la thermodynamique)

d - La deuxième loi de la thermodynamique.

Ces quatre lois fondamentales seront appliquées pour un volume de contrôle du fluide en mouvement.

2.1 - Equation de conservation de la masse (Equation de continuité):

Considérons un écoulement de fluide.

Il est représenté par des lignes de courant.

Soit m la masse du fluide contenue à des différentes régions et à des instants différents.

Le système occupe la région (A) à l'instant t et à l'instant $(t + \Delta t)$ il occupe les régions (B) et (A-C).

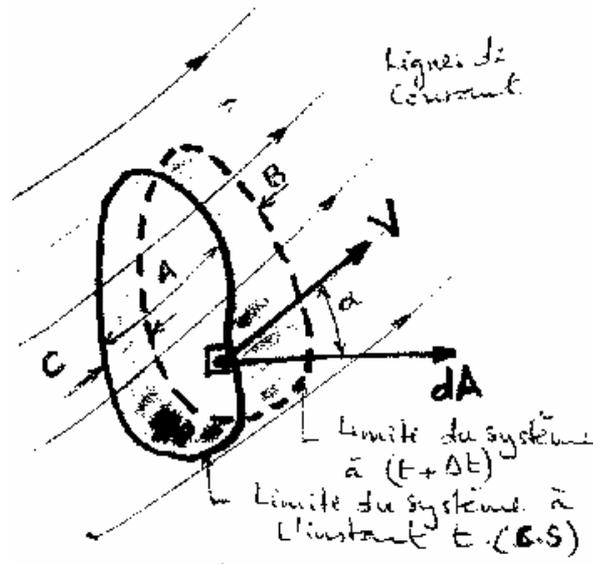


Figure 1.1 - Système en mouvement à travers un volume de contrôle

D'après le principe de conservation de la masse Nous avons :

$$m_A(t) = m_A(t+\Delta t) - m_C(t+\Delta t) + m_B(t+\Delta t)$$

Après réarrangement de l'équation et division par Δt nous obtenons:

$$\{ m_A(t+\Delta t) - m_A(t) \} / \Delta t = \{ m_C(t+\Delta t) - m_B(t+\Delta t) \} / \Delta t$$

Prenons la limite quand $\Delta t \rightarrow 0$, le terme de gauche devient :

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \{ m_C(t+\Delta t) - m_B(t+\Delta t) \} / \Delta t &= \partial (m_{cv}) / \partial t \\ &= \partial / \partial t (\int_{cv} \rho \cdot dV) \end{aligned}$$

où ρ : est la densité de masse ou la masse volumique,

V : est le volume,

C_v : désigne le volume de contrôle fixé dans le temps et limité dans l'espace par les surfaces de contrôle (C.S).

Le terme de droite est :

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \{m_C(t+\Delta t) - m_B(t+\Delta t)\} / \Delta t &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \{m_C(t+\Delta t) / \Delta t\} - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \{m_B(t+\Delta t) / \Delta t\} \\ &= m_{in} - m_{out} \\ &= \int_{A_{in}} \rho \cdot V \cdot \cos \alpha \cdot dA - \int_{A_{out}} \rho \cdot V \cdot \cos \alpha \cdot dA \\ &= - \int_{CS} \rho \cdot V \cdot dA \end{aligned}$$

ici m_{in} et m_{out} représentent les débits massiques à l'entrée et à la sortie du volume de contrôle c_v et V est le vecteur vitesse. α est l'angle que fait le vecteur vitesse avec la normale.

L'équation de continuité pour un volume de contrôle s'écrit sous sa forme intégrale :

$$\int_{CS} \rho \cdot V \cdot dA = - \partial / \partial t (\int_{cv} \rho \cdot dV) \quad (1.1)$$

Examinons l'équation (1.1) en considérant quelques simplifications générales et puis des exemples spécifiques. Le volume de contrôle C_v est fixe.

Dans le cas d'un écoulement permanent ($\partial / \partial t = 0$), l'équation (1.1) devient :

$$\int_{CS} \rho \cdot V \cdot dA = 0 \quad (1.2)$$

Si le fluide est incompressible :

$$\int_{CS} V \cdot dA = 0 \quad (1.3)$$

Considérons un écoulement permanent de fluide, qui entre de la section A1 et sort de la section A2.

Nous avons :

$$\int_{A1} \rho \cdot V \cdot dA + \int_{A2} \rho \cdot V \cdot dA = 0$$

Les vitesses sont supposées normales aux sections A1 , A2.

$$\int_{A2} \rho \cdot V_2 \cdot dA - \int_{A1} \rho \cdot V_1 \cdot dA = 0$$

Les vitesses et les densités de masse sont supposées uniformes dans les sections A1 et A2 :

$$\rho \cdot V_2 \cdot A_2 - \rho \cdot V_1 \cdot A_1 = 0$$

et l'équation de continuité s'écrit:

$$\rho \cdot V_2 \cdot A_2 = \rho \cdot V_1 \cdot A_1$$

PROFES :



(1.4)

2.2 - Equation de conservation des quantités de mouvements:

Nous allons procéder au développement de l'équation des quantités de mouvement pour un volume de contrôle. Cette équation est l'une des plus importantes représentations mathématiques du mouvement des fluide sur les surfaces solides (force de l'écoulement agissant sur un coude de conduite, poussée d'un turboréacteur ou moteur-fusée, traînée sur aile d'avion etc...).

La deuxième loi de Newton du mouvement spécifie que la force F agissant sur une particule ou un système de particules de masse fixe est égale à la variation de quantité de mouvement de cette masse; soit :

$$F = d M / d t \quad (1.5)$$

Ou M représente la quantité de mouvement linéaire.

Supposant que la force F est constante dans l'intervalle de temps Δt ; Nous avons :

$$F \cdot \Delta t = \Delta M \quad (1.6)$$

En se référant à la figure (1.1), le terme ΔM s'écrit donc:

$$\Delta M = M_A(t+\Delta t) - M_C(t+\Delta t) + M_B(t+\Delta t) - M_A(t)$$

Réarrangeant et divisant par Δt :

$$\Delta M / \Delta t = \{ M_A(t+\Delta t) - M_A(t) \} / \Delta t + \{ M_B(t+\Delta t) - M_C(t+\Delta t) \} / \Delta t \quad (1.7)$$

Considérons la limite lorsque $\Delta t \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} [\{ M_A(t+\Delta t) - M_A(t) \} / \Delta t] &= \partial / \partial t (M_{cv}) \\ &= \partial / \partial t (\int_{cv} \rho \cdot V \cdot dV) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} [\{ M_B(t+\Delta t) - M_C(t+\Delta t) \} / \Delta t] &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} [\Sigma \Delta M(t+\Delta t) |_B / \Delta t - \Sigma \Delta M(t+\Delta t) |_C / \Delta t] \\ &= \Sigma_B \Delta M - \Sigma_C \Delta M \\ &= (\Sigma \Delta m \cdot V)_{in} - (\Sigma \Delta m \cdot V)_{out} \\ &= \int_{cs} V \cdot \rho \cdot V \cdot dA \end{aligned}$$

La somme $\Sigma \Delta M(t+\Delta t) |_B$ représente la quantité de Mouvement associée à la masse qui a traversé la limite de la région B pendant l'intervalle de temps Δt .

Le terme $\Sigma \Delta M |_C$ est le taux temporaire auquel la quantité de Mouvement a traversé la section de la région B pendant l'intervalle de temps Δt .

L'équation (1.6) s'écrit donc:

$$F = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{cv} V \cdot \rho \cdot dV \right) + \int_{cs} V \cdot \rho \cdot V \cdot dA \quad (1.8)$$

La force F se décompose en deux composantes:

- Une force totale de surface F_s due à la pression et aux contraintes superficielles.
- Une force de volume $F_B = \int_{cv} B \cdot dV$

L'équation des quantités de mouvement pour un volume de contrôle devient donc:

$$F_s + \int_{cv} B \cdot dV = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{cv} V \cdot \rho \cdot dV \right) + \int_{cs} V \cdot \rho \cdot V \cdot dA \quad (1.9)$$

L'équation (1.9) est la forme intégrale de l'équation des quantités de mouvement. Physiquement, cette équation spécifie que le taux de variation de la quantité de mouvement contenue dans un volume plus le flux des quantités de mouvement à travers les surface limites de ce volume sont égaux à la somme algébrique des forces agissant sur ce volume.

2.3 - Equation du Moment Angulaire:

En pratique, l'équation des quantités de mouvement est utilisée pour la détermination des forces agissant sur un volume de contrôle en fonction du débit des flux des quantités de mouvement à travers les surfaces. Lorsqu'il s'agit de mouvement de rotation, on s'intéresse beaucoup plus au moment des forces ou au couple que de la force elle même.

Considérons l'équation des quantités de mouvement linéaire (1.9); Soit r le vecteur de position et faisons le produit du vecteur r avec l'équation :

$$\int_{cs} r \cdot dF_s + \int_{cv} r \cdot B \cdot dV = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{cv} r \cdot V \cdot \rho \cdot dV \right) + \int_{cs} r \cdot V \cdot \rho \cdot V \cdot dA \quad (1.10)$$

L'équation (1.10) représente l'équation du Moment angulaire. Le terme $(\int_{cs} r \cdot dF_s)$ représente le moment autour du point d'application de la force dF_s sur la surface de contrôle. Le terme $(\int_{cv} r \cdot B \cdot dV)$

est le moment des forces de volume agissant sur l'élément de volume dV par rapport à l'origine. Le terme $[\partial / \partial t (\int_{CV} r \cdot V \cdot \rho \cdot dV)]$ représente le moment angulaire de la masse dans le volume de contrôle. Le dernier terme $(\int_{cs} r \cdot V \cdot \rho \cdot V \cdot dA)$ est le taux des flux des quantités de mouvement à travers la surface de contrôle.

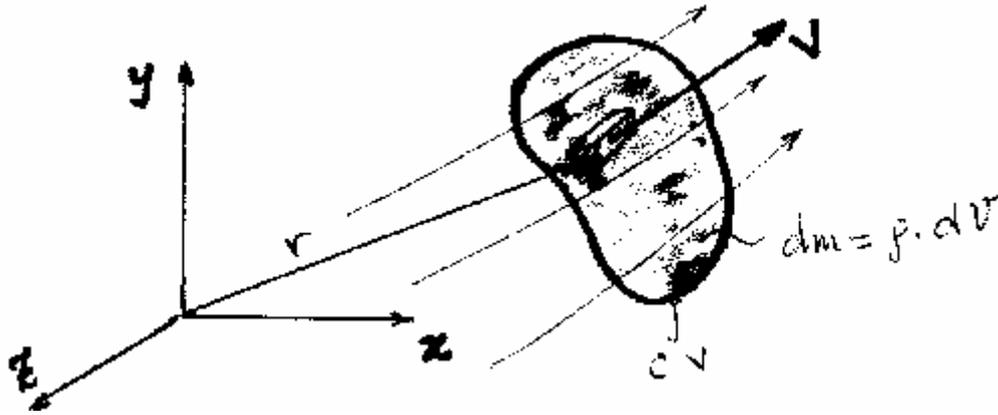


Figure 1.2 - Moment angulaire dans un volume de contrôle

Pour l'application de l'équation (1.10), on utilise généralement la forme des composantes scalaires. Par exemple, si on veut écrire l'équation pour l'axe Z dans le cas d'un écoulement permanent où les forces massiques (de volume) sont négligeables, on obtient :

$$T_z = \int_{cs} (r \cdot V)_z (\rho \cdot V \cdot dA) \quad (1.11)$$

où T_z : représente le couple de la force totale sur le volume de contrôle par rapport à l'axe Z, et:

$$(r \cdot V)_z = r \cdot V_t \quad (1.12)$$

$$\rho \cdot V \cdot dA = \rho \cdot V \cdot \cos\alpha \cdot dA$$

où V_t est la composante de la vitesse perpendiculaire à l'axe Z;

α est l'angle entre le vecteur vitesse et la section dA .

Donc :

$$T_z = \int_{cs} \rho \cdot r \cdot V_t \cdot V \cdot \cos\alpha \cdot dA \quad (1.13)$$

Supposant que l'écoulement entre le volume de contrôle par une section A1 et sort de la section A2. Les paramètres de l'écoulement ρ , V et $\cos\alpha$ sont uniformes à travers les deux sections. Soient les valeurs moyennes à travers les sections A1 et A2 :

$$r_1 \cdot V_{t1} = 1/A_1 \int_{A1} r \cdot V_t \cdot dA$$

$$r_2 \cdot V_{t2} = 1/A_2 \int_{A2} r \cdot V_t \cdot dA$$

L'équation de continuité est :

$$\begin{aligned} \rho_1 \cdot A_1 \cdot V_1 \cdot \cos\alpha_1 &= \rho_2 \cdot A_2 \cdot V_2 \cdot \cos\alpha_2 \\ &= \rho \cdot Q \end{aligned}$$

Après réarrangement, l'équation (1.13) devient :

$$T_z = \rho \cdot Q \cdot (r_2 \cdot V_{t2} - r_1 \cdot V_{t1}) \quad (1.14)$$

L'équation (1.14) sert pour la détermination du couple de force ou les vitesses d'écoulement dans les machines tournantes à fluides ou turbomachines (Fig. 1.3).

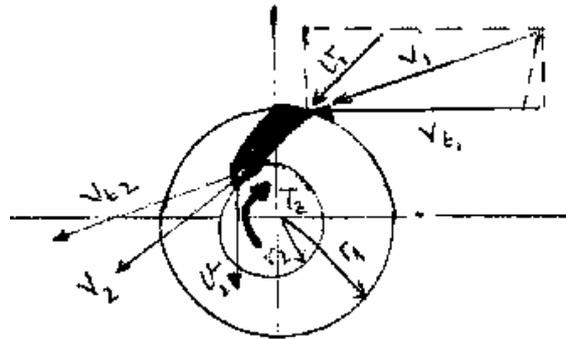


Figure 1.3 - Diagramme des vitesses dans une turbine

2.4 - Principe de la Conservation de l'énergie :

Dans un système mécanique, le premier principe de la thermodynamique stipule que :

$$Q - W = \Delta E \quad (1.15)$$

où Q : représente la quantité de chaleur ajoutée au système;

W : est le travail du système;

ΔE : est la variation de l'énergie totale du système.

L'énergie totale du système est :

$$E = U + \frac{1}{2} m.v^2 + m.g.z \quad (1.16)$$

où U : représente l'énergie interne du système;

$mv^2 / 2$: est l'énergie cinétique du système;

mgz : énergie potentielle associée à la position du système.

Ecrivant cette équation pour un volume de contrôle de fluide. Soient q , w et e représentent respectivement la quantité de chaleur, le travail et énergie totale rapportés à l'unité de masse.

L'équation (1.15) devient:

$$q - w = \Delta e \quad (1.17)$$

Considérons le système montré sur la figure (1.4), qui se déplace d'une position à l'instant t à une autre position à l'instant $(t+\Delta t)$.

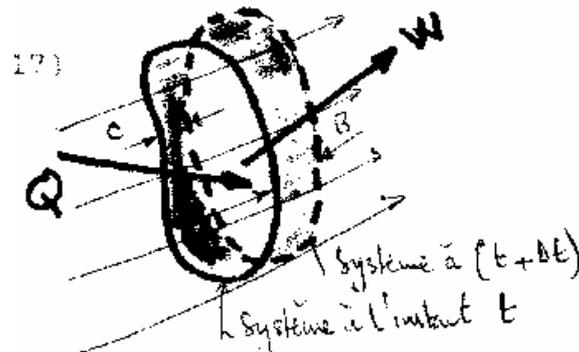


Figure 1.4 - Balance Energétique dans un volume de contrôle

L'équation de l'énergie s'écrit donc: $Q - W = E_f - E_i$

où E_f et E_i sont respectivement les énergies finale et initiale du système.

Divisons par Δt :

$$\frac{Q}{\Delta t} - \frac{W}{\Delta t} = \frac{E_f - E_i}{\Delta t} \quad (1.18)$$

Le terme de droite est :

$$\begin{aligned} \frac{E_f - E_i}{\Delta t} &= \frac{E_A(t + \Delta t) - E_c(t + \Delta t) + E_B(t + \Delta t) - E_A(t)}{\Delta t} \\ &= \frac{E_A(t + \Delta t) - E_A(t) + E_B(t + \Delta t) - E_c(t + \Delta t)}{\Delta t} \end{aligned}$$

Prenons la limite lorsque $\Delta t \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} [\{ E_A(t + \Delta t) - E_A(t) \} / \Delta t] &= \partial / \partial t (E_{cv}) \\ &= \partial / \partial t (\int_{cv} e \cdot dm) \\ &= \partial / \partial t (\int_{cv} \rho \cdot e \cdot dV) \end{aligned}$$

et

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} [\{ E_B(t + \Delta t) - E_C(t + \Delta t) \} / \Delta t] = \int_{cs} e \cdot \rho \cdot V \cdot dA$$

Donc nous avons :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} [(E_f - E_i) / \Delta t] = \partial / \partial t (\int_{cv} \rho \cdot e \cdot dV) + \int_{cs} e \cdot \rho \cdot V \cdot dA \quad (1.19)$$

Sachant que le travail effectué sur la surface de contrôle se réalise par les contraintes normales de l'écoulement (pression hydrostatique) et tangentielles (Contraintes de frottement visqueuses).

Donc, l'équation de l'énergie devient :

$$dQ/dt - dW_s/dt = \partial / \partial t (\int_{cv} \rho \cdot e \cdot dV) + \int_{cs} (e + p / \rho) \cdot \rho \cdot V \cdot dA \quad (1.20)$$

3 - Equations différentielles :

Dans la section précédente, les lois de base appliquées à un système, ont été utilisées pour établir les équations intégrales appliquées à un volume de contrôle dans l'écoulement. Dans cette section, nous allons établir les mêmes équations sous leur forme différentielle locale. La description Eulerienne est adoptée. Le vecteur vitesse instantanée est fonction de la position et du temps; soit:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}(r, t) \quad \text{ou} \quad \mathbf{V} = \mathbf{V}(x, y, z, t)$$

3.1 - Equation de continuité

Considérons équation (1.1) :

$$\int_{CS} \rho.V.dA = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho.dV \quad (1.22)$$

D'après le théorème de Gauss, intégrale de surface est convertie en intégrale de volume comme suit:

$$\int_{CS} \rho.V.dA = \int_{CV} \nabla(\rho.V).dV \quad (1.22)$$

Donc l'équation (1.22) devient :

$$\int_{CV} \nabla(\rho.V).dV + \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho.dV = \int_{CV} [\nabla(\rho.V) + \frac{\partial \rho}{\partial t}].dV = 0$$

Le volume de contrôle étant arbitraire, donc

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla.(\rho V) = 0$$

ou (1.23)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} . (\rho V) = 0$$

L'équation (1.23) est la forme différentielle de l'équation de continuité, qui peut s'écrire sous différentes formes selon les systèmes de coordonnées :

- En coordonnées cartésiennes (En notation tensorielles) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} . (\rho U_i) = 0$$

- En coordonnées cylindriques :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} . (r . V_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z} . = 0$$

3.2 - Equations des quantités de mouvement :

Considérons un cube de fluide (Figure 1.5); Les tensions normales et tangentielles appliquées sur l'élément sont représentées par un tenseur σ_{ij} tel que:

$$\sigma_{ij} = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix}$$

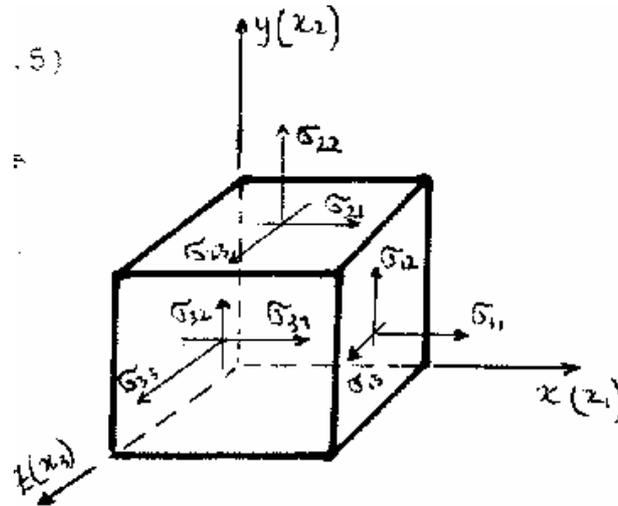


Figure 1.5 - Tensions agissant sur un élément cubique de fluide

L'indice "i" indique la surface sur laquelle la tension s'applique, et l'indice "j" indique la direction sur laquelle la tension agit.

Le tenseur σ_{ij} est symétrique; c.a.d: $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$

Ce ci implique que :

- Dans le cas contraire, l'élément fluide aura une vitesse angulaire infinie.
- Le nombre des composantes du tenseur se réduit à six au lieu de neuf.

Appliquant maintenant l'équation intégrale des quantités de mouvement (1.9) à l'élément cubique où les tensions composent la force extérieure F_s .

En se référant à la figure (1.6), le principe de la conservation de la quantité de mouvement selon la direction axiale se traduit par:

$$\begin{aligned}
 & (\sigma_{11}|_{x+\Delta x} - \sigma_{11}|_x) \Delta y \cdot \Delta z + (\sigma_{21}|_{y+\Delta y} - \sigma_{21}|_y) \Delta x \cdot \Delta z \\
 + & (\sigma_{31}|_{z+\Delta z} - \sigma_{31}|_z) \Delta x \cdot \Delta y + B_x \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \\
 = & \frac{\partial}{\partial t} (\rho U) \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z + (\rho U^2|_{x+\Delta x} - \rho U^2|_x) \Delta y \cdot \Delta z \\
 + & (\rho U \cdot V|_{y+\Delta y} - \rho U \cdot V|_y) \Delta x \cdot \Delta z + (\rho U \cdot W|_{z+\Delta z} - \rho U \cdot W|_z) \Delta x \cdot \Delta y
 \end{aligned}$$

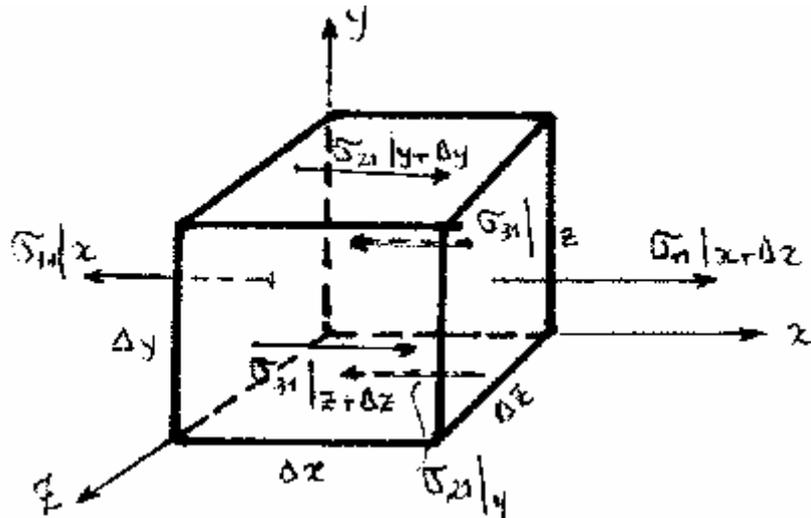


Figure 1.6 - Dérivation de l'équation des quantité de mouvement axiale pour un élément cubique

En divisant par élément de volume ($\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$) et prenant la limite lorsque $\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0$ l'équation précédente s'écrit :

$$\rho \frac{DU}{Dt} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial z} + B_x \quad (1.24)$$

L'équation (1.24) représente la conservation de la quantité de mouvement selon l'axe des x.

De la même manière, les équations de quantité de mouvement peuvent être obtenues selon les axes des y et z. Ces équations s'écrivent comme suit:

$$\rho \frac{DV}{Dt} = \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial z} + B_y \quad (1.25)$$

$$\rho \frac{DW}{Dt} = \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} + B_z \quad (1.26)$$

En notation tensorielle généralisée:

$$\rho \frac{DU_i}{Dt} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + B_i = \rho \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) \quad (1.27)$$

Il est à noter ici que le terme de gauche de l'équation (1.27) représente l'accélération totale de l'écoulement qui est la somme de l'accélération locale temporelle ($\partial U_i / \partial t$) et de l'accélération convective ($U_j \cdot \partial U_i / \partial x_j$).

(D/Dt) est un opérateur de différentiation substantielle ou totale. Son expression dans les différents systèmes de coordonnées est montrée en annexe A.

Dans le cas général, le fluide est visqueux. On doit examiner les relations entre les tensions σ_{ij} et les gradients de vitesse ou déformations ($\partial U_i / \partial x_j$).

Le tenseur des déformations (gradients de vitesses) est égal à la somme des deux tenseurs:

- Tenseur de déformation pure, e_{ij} ;
- Tenseur de rotation (tourbillon), ω_{ij} .

$$\text{soit : } \partial U_i / \partial x_j = e_{ij} + \omega_{ij} \quad (1.28)$$

Avec les composantes du tenseur de déformation pure, e_{ij} , et du tenseur tourbillon, ω_{ij} , sont données par les relations suivantes:

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \partial U / \partial x & ; & & e_{xy} &= e_{yx} &= & \frac{1}{2} (\partial U / \partial y + \partial V / \partial x) \\ e_{yy} &= \partial V / \partial y & ; & & e_{yz} &= e_{zy} &= & \frac{1}{2} (\partial V / \partial z + \partial W / \partial y) \\ e_{zz} &= \partial W / \partial z & ; & & e_{xz} &= e_{zx} &= & \frac{1}{2} (\partial W / \partial x + \partial U / \partial z) \\ \Omega_x &= \omega_{zy} &= & -\omega_{yz} &= & \frac{1}{2} (\partial W / \partial y - \partial V / \partial z) \\ \Omega_y &= \omega_{xz} &= & -\omega_{zx} &= & \frac{1}{2} (\partial U / \partial z - \partial W / \partial x) \\ \Omega_z &= \omega_{yx} &= & -\omega_{xy} &= & \frac{1}{2} (\partial V / \partial x - \partial U / \partial y) \end{aligned} \quad (1.29)$$

Pour un fluide Newtonien, la relation entre les tensions σ_{ij} et les gradients de vitesses est une relation linéaire qui peut s'écrire sous la forme :

$$\sigma_{ij} = -p \cdot \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) + \xi \delta_{ij} \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \quad (1.30)$$

où δ_{ij} : Delta de Kronecker défini par : $\delta_{ij} = 1$ pour $i = j$
 $\delta_{ij} = 0$ pour $i \neq j$.

ξ : est un coefficient de viscosité défini par : $\xi = \lambda + 2/3 \cdot \mu$
 ($\xi = 0$ pour les gaz mono atomique.)

En utilisant la relation (1.30), l'équation (1.27) s'écrit :

$$\rho \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + B_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\xi \delta_{ij} \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) \quad (1.31)$$

L'équation (1.31) représente les équations générales de **Navier-Stokes**. Ces équations sont complètes et décrivent les écoulements des fluides Newtoniens et visqueux. L'écriture de ces équations dans les différents systèmes de coordonnées est montrée en annexe A.

Des simplifications considérables de ces équations peuvent être obtenues pour un certain nombre d'écoulement.

- Pour un écoulement de fluide incompressible de masse volumique ρ constante, l'équation (1.31) se réduit à:

$$\rho \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + B_i + \mu \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (1.32)$$

En notation vectorielle :

$$\rho \frac{\partial V}{\partial t} = -\nabla \cdot p + B + \mu \cdot \nabla^2 \cdot V \quad (1.33)$$

- Pour un écoulement de fluide parfait, le terme de viscosité est nul. Les équations de Navier-Stokes se réduisent donc à :

$$\rho \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + B_i \quad (1.34)$$

L'équation (1.34) représente les équations **d'Euler** pour l'écoulement potentiel de fluide idéal. D'une façon générale, les équations de Navier-Stokes se réduisent aux équations d'Euler si la viscosité du fluide ou les dérivées des vitesses dans le sens autre que la direction de l'écoulement moyen sont négligeables. Cette dernière approximation est très importante en mécanique des fluides. Elle fait l'objet de plusieurs approches pour l'étude des écoulements.

Il est généralement accepté que pour la plupart des écoulements qui s'effectuent en présence de paroi solide, on distingue deux régions d'écoulement (Figure 1.7):

- Une zone adjacente à la paroi solide où l'effet de viscosité est important; Cette zone de l'écoulement est dite *couche limite*. Les équations de Navier-stokes doivent être utilisées sans simplifications;

- Une deuxième zone loin de la paroi où le terme de viscosité est négligeable; L'écoulement est dit potentiel. Les équations d'Euler sont utilisées pour la description de l'écoulement.

Ainsi, cette approche zonale permet de simplifier le problème de la résolution numérique de l'écoulement. Les équations complètes ne sont considérées que dans une région du domaine de l'écoulement.

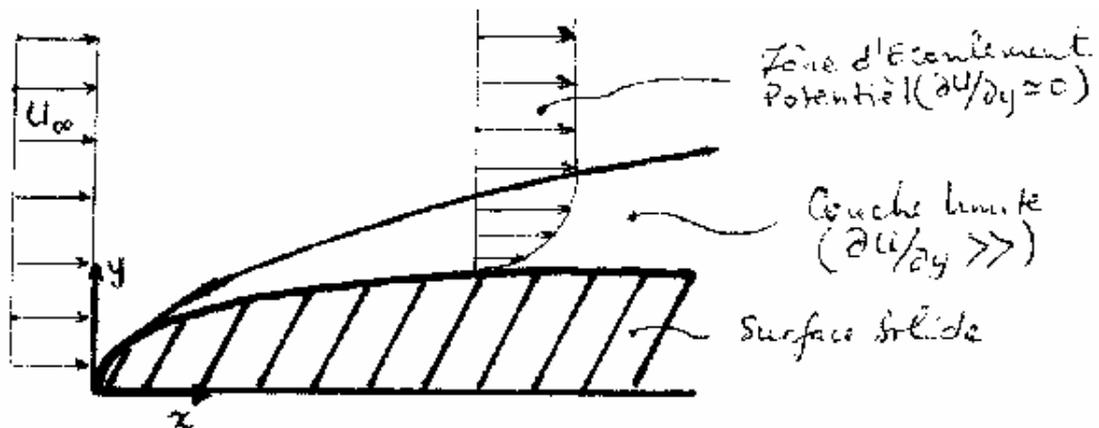


Figure 1.7 - Ecoulement sur une paroi solide

3.3 - Equation de énergie :

Considérons le volume de contrôle schématisé dans la Figure (1.8).

V : étant le vecteur vitesse et

q : étant le vecteur la flux de chaleur traversant l'aire de surface dA .

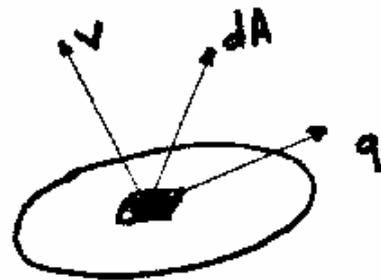


Figure 1.8 - Volume de contrôle
Pour la dérivation de l'équation de l'énergie

Le flux total de chaleur traversant le volume de contrôle est :

$$dQ/dt = - \int_{cs} q \cdot dA = \int_{cs} q_i \cdot dA_i \quad (1.35)$$

Le travail réalisé par le fluide sur le volume de contrôle est :

$$dW/dt = - \int_{cs} u_i \cdot \sigma_{ji} \cdot dA_i \quad (1.36)$$

Avec la tension $\sigma_{ij} = -p.\delta_{ij} + \sigma'_{ij}$

Avec le terme $(-p.\delta_{ij})$ représente la contribution due à la pression et σ'_{ij} est la contribution due au cisaillement du fluide.

Comme il à été montré en section (2.4), le principe de la conservation de énergie pour un volume de contrôle, spécifie que le taux de variation de l'énergie totale (énergie cinétique, potentielle et interne) du volume de contrôle est égale au flux de chaleur entrant le volume plus le taux de génération (production) de la chaleur, moins le taux du travail effectué par le fluide sur son environnement; donc l'équation :

$$\partial/\partial t (\int_{cv} \rho.e.dV) + \int_{cs} \rho.u_i.dA_i = - \int_{cs} q_i . dA_i + \int_{cs} u_i . \sigma_{ji} . dA_i + \int_{cv} q'''.dV \quad (1.37)$$

En utilisant le théorème de gauss, et après quelques réarrangements, l'équation de énergie devient :

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} = - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} - p. \frac{\partial u_i}{\partial x_i} - u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial \sigma'_{ji}}{\partial x_j} + \Phi + q''' \quad (1.38)$$

L'énergie totale par unité de masse, e, est : $e = u + \frac{1}{2} \rho V^2 + g.z$

Φ est une fonction de dissipation définie par :

$$\Phi = \sigma'_{ij} . \partial U_j / \partial x_i \quad (1.39)$$

Le terme Φ représente le taux auquel, les contraintes de cisaillement exercent un travail irréversible sur le fluide. U_i représente les composantes du vecteur de vitesse instantanée V .

Les termes de l'équation (1.38) reflètent un nombre important d'influences qui ne sont pas toujours présentes dans un cas spécifique d'écoulement. D'après Patankar (1980), cette équation peut s'écrire sous une forme plus simple comme suit:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + U_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \lambda \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} + S_\phi \quad (1.40)$$

ϕ : une quantité scalaire qui peut être l'enthalpie h , la température T ou autre;

S_ϕ : est le terme de source de l'équation;

λ : un coefficient de conductivité (ou de diffusivité) thermique.

Il est intéressant de noter ici que l'équation (1.40) décrit le principe de conservation des espèces chimiques présentes dans les écoulements de fluides chimiquement réactifs, tels que les écoulements de gaz dans les chambres de combustion des moteurs et les écoulements des effluents déchargés dans l'atmosphère ou dans milieux aquatiques.

4 - Approches utilisées à la résolution des problèmes de la dynamique des fluides:

Dans ce chapitre nous avons développés les équations fondamentales de la dynamique des fluides. L'objectif est donc de les utiliser pour résoudre des problèmes d'ordre pratique. Les méthodes expérimentales représentent une pratique générale pour étudier les phénomènes d'écoulement. Toutefois, les méthodes de résolution numériques des équations (Navier-Stokes) régissant les écoulements sont une deuxième alternative.

D'une façon générale, les formes intégrales des équations développées en section 2, sont utilisées pour l'étude des effets globaux (force exercée par l'écoulement de fluide sur une conduite coudée ou sur un rotor de turbine etc...). Tandis que les formes différentielles sont utilisées pour examiner les répartitions des différents paramètres des écoulements.

Pour une situation particulière d'un écoulement, on commence par l'écriture des équations de base, puis on les développe selon les conditions de l'écoulement.

La solution des équations de Navier-Stokes ne peut être exacte que dans certains cas très limités. D'une façon générale, on cherche une solution approchée à la solution exacte dont la précision dépend de l'approche numérique et du modèle mathématique utilisé.

La procédure d'une solution générale d'un écoulement passe par les étapes suivantes :

1 - Définition et spécification du problème physique: En tenant compte des conditions géométriques de l'écoulement.

2 - Représentation du modèle physique: En adoptant quelques suppositions >simplificatrices comme l'écoulement étant unidimensionnel, permanent, le fluide est parfait etc. ...

Il est bien évident que ces suppositions doivent être justifiées.

3 - Etablissement d'un modèle mathématique : En écrivant les équations décrivant le modèle physique.

4 - Solution numérique des équations pour les paramètres désirés : D'une façon générale, on fait appel dans cette étape à des méthodes numériques (méthodes de discretisation des équations différentielles, méthodes de résolutions équations algébriques etc...). L'utilisation de calculateurs numériques rapides permet la résolution de ces équations avec une précision acceptable en ingénierie .

5 - Expérimentation: Cette dernière étape est très importante pour vérifier la précision du modèle mathématique pour la description du modèle physique étudié. Elle permet aussi l'amélioration du modèle mathématique choisi.

Dans les chapitres qui suivent, Nous allons examiner les méthodes numériques de résolution des équations de Navier-Stokes. Les applications de ces méthodes pour l'examen de quelques écoulements pratiques dans les différents domaines de la sciences et de la technologie seront examinées.